

De Vectores al Álgebra Geométrica

Sergio Ramos Ramírez,
José Alfonso Juárez González,
Volkswagen de México
72700 San Lorenzo Almecatla, Cuautlancingo, Pue., México

Garret Sobczyk
Universidad de las Américas-Puebla
Departamento de Físico-Matemáticas
72820 Puebla, Pue., México

February 4, 2018

Abstract

El Álgebra Geométrica es la extensión natural del concepto de vector y de la suma de vectores. Después de revisar las propiedades de la suma vectorial, definimos la multiplicación de vectores de tal manera que respete el famoso Teorema de Pitágoras. Varias demostraciones sintéticas de teoremas en geometría euclidiana pueden así ser reemplazadas por elegantes demostraciones algebraicas. Aunque en este artículo nos limitamos a 2 y 3 dimensiones, el Álgebra Geométrica es aplicable a cualquier dimensión, tanto en geometrías euclidianas como no-euclidianas.

0 Introducción

La evolución del concepto de número, el cual es una noción central en Matemáticas, tiene una larga y fascinante historia, la cual abarca muchos siglos y ha sido testigo del florecimiento y caída de muchas civilizaciones [4]. En lo que respecta a la introducción de los conceptos de números negativos e imaginarios, Gauss hacía la siguiente observación en 1831: "... este tipo de avances, sin embargo, siempre se han hecho en primera instancia con pasos tímidos y cautelosos". En el presente artículo, presentamos al lector las ideas y métodos más elementales del Álgebra Geométrica, la cual fue descubierta por William Kingdon Clifford (1845-1879) poco antes de su muerte [1], y constituye la generalización natural de los sistemas de números reales y complejos, a través de la introducción de nuevos entes matemáticos denominados *números con dirección*.

En la Sección 1, extendemos el sistema de los números reales \mathbb{R} para incluir *vectores*, los cuales son *segmentos de línea con longitud y dirección*. Dado que el

significado geométrico de la suma vectorial y de la multiplicación de vectores con *números reales* o *escalares* es bien conocido, damos aquí sólo un breve resumen. Queremos recalcar que el concepto de vector como un segmento dirigido en un espacio plano es independiente de cualquier sistema de coordenadas y de la dimensión del espacio. Es fundamental entender que la *posición* de cada segmento dirigido en un espacio plano no es importante, dado que un vector con origen en un punto dado puede ser trasladado a cualquier otro punto, mientras conserve su longitud y dirección.

La Sección 2 trata del *producto geométrico* de vectores. Así como podemos *sumar* y *multiplicar* números reales, si queremos ampliar el sistema de números reales para incluir vectores, deberemos ser capaces de *multiplicarlos* y *sumarlos*. Como guía para entender cómo multiplicar vectores geoméricamente, recordamos el milenar Teorema de Pitágoras, mismo que relaciona los lados de un triángulo rectángulo. Dejando de lado únicamente la ley universal sobre la *conmutatividad* de la multiplicación, descubrimos que el producto de dos vectores ortogonales es anti-conmutativo y establece una nueva entidad llamada *bivector*. Definimos los productos *interno* y *exterior* en términos de las partes *simétrica* y *anti-simétrica* del producto geométrico de vectores, e investigamos varias relaciones importantes entre estos tres productos.

En la Sección 3, nos limitamos a las Álgebras Geométricas más básicas \mathbb{G}_2 del plano euclidiano \mathbb{R}^2 y \mathbb{G}_3 del espacio euclidiano \mathbb{R}^3 . Estas Álgebras Geométricas ofrecen ejemplos concretos y permiten realizar cálculos basados en los conocidos sistemas de coordenadas rectangulares en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , aunque debemos tener en cuenta las discusiones generales de las secciones anteriores. A finales del siglo XIX, se libró la gran lucha entre el *cuaternión* y el Álgebra Vectorial de *Gibbs-Heaviside* [3]. Mostramos cómo el *producto cruz* estándar de dos vectores es el *dual* natural del producto exterior de esos vectores, así como la relación con otras identidades bien conocidas en el Análisis Vectorial estándar. Estas ideas pueden generalizarse fácilmente a Álgebras Geométricas de mayor dimensión tanto en espacios euclidianos como no-euclidianos, utilizados ampliamente en las famosas Teorías de la Relatividad de Einstein [5] y en diversos campos de las Matemáticas [7, 8] y la Ingeniería [2, 6].

En la Sección 4 abordamos algunas ideas elementales de la Geometría Analítica, incluyendo la ecuación vectorial de una línea recta y la de un plano. Presentamos fórmulas para la descomposición de un vector en componentes paralela y perpendicular a una línea y a un plano, así como expresiones para la reflexión y la rotación de un vector en espacios de 2, 3 y más dimensiones.

En la Sección 5, la flexibilidad y el poder del Álgebra Geométrica se revelan completamente al discutir la *proyección estereográfica* de la esfera unitaria en $2D$, centrada en el origen, sobre el plano euclidiano. La proyección estereográfica, y su generalización a dimensiones mayores, tienen profundas aplicaciones en muchas áreas de las Matemáticas y la Física. Por ejemplo, los *spinors* de 2 componentes, fundamentales en Mecánica Cuántica, tienen una interpretación directa en la proyección estereográfica de la esfera bidimensional [12].

Es notable que a casi 140 años de su descubrimiento, este poderoso sistema

numérico-geométrico, el complemento natural del sistema de números reales que incluye el concepto de dirección, no sea universalmente conocido por la comunidad científica, a pesar de que han habido muchos desarrollos y aplicaciones de esta teoría a niveles avanzados en Matemáticas, Física Teórica y, más recientemente, en Informática y Robótica. Creemos que la razón principal de esta lamentable situación ha sido la falta de una presentación concisa y rigurosa en los niveles básicos de enseñanza. Por esta razón, prestamos mucha atención a la introducción de los productos interno y exterior, y desarrollamos las identidades básicas de una manera clara y directa, de tal forma que su generalización a Álgebras Geométricas euclidianas y no-euclidianas de mayor dimensión no presente grandes obstáculos. Finalmente, damos referencias cuidadosamente seleccionadas a material más avanzado, que el lector podrá seguir según sus propios intereses.

1 Suma geométrica de vectores

Los números naturales se utilizan para expresar cantidades de objetos, como 3 vacas, 4 libras o 5 pasos hacia el norte. Históricamente, los números naturales se han ampliado gradualmente para incluir fracciones, números negativos y todos los números de la recta numérica. Los *vectores*, o *segmentos de línea dirigidos*, son un nuevo tipo de número que incluye la noción de dirección. Un vector $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\hat{\mathbf{v}}$ tiene *longitud* $|\mathbf{v}|$ y *dirección unitaria* $\hat{\mathbf{v}}$, como se muestra en la Figura 1, donde también se ilustra la suma $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Sean \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} vectores. Cada una de las gráficas en la Figura 2 muestra una propiedad geométrica básica de la suma vectorial, junto con su correspondiente traducción algebraica. Por ejemplo, el *negativo* del vector \mathbf{a} es el vector $-\mathbf{a}$, el cual tiene la misma longitud que el vector \mathbf{a} pero *dirección* u *orientación* opuesta, como se muestra en la Figura 2: 1). Procedemos ahora a resumir las leyes algebraicas que rigen la suma geométrica de vectores, y su multiplicación con números reales.

$$(A1) \quad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0\mathbf{a} = \mathbf{a}0 = 0$$

Inverso aditivo de un vector

$$(A2) \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

Ley Conmutativa de la suma vectorial

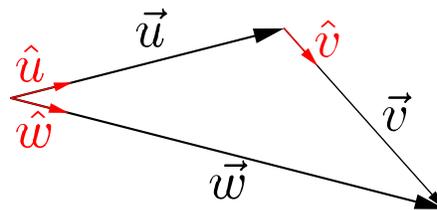


Figure 1: Suma vectorial.

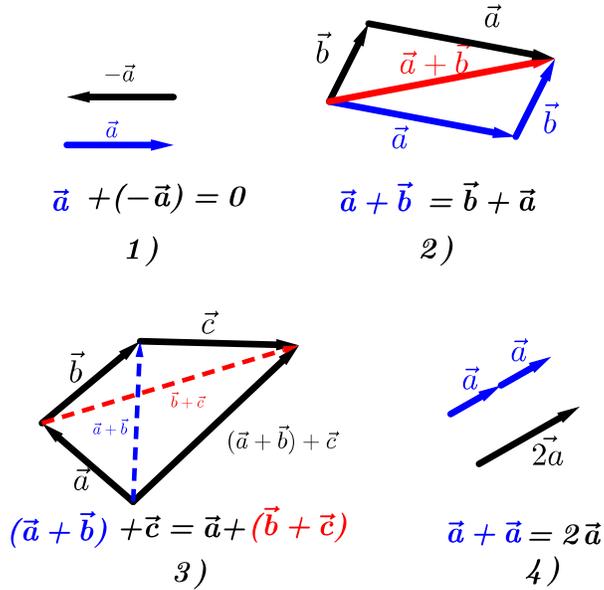


Figure 2: Propiedades geométricas de la suma vectorial.

(A3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) := \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$

*Ley Asociativa
de la suma vectorial*

(A4) Para toda $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \mathbf{a} = \mathbf{a} \alpha$

*Los números reales conmutan
con los vectores*

(A5) $\mathbf{a} - \mathbf{b} := \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$

Definición de la resta vectorial

En la regla (A1), el símbolo 0 representa tanto el vector cero como el escalar cero. La regla (A4) nos indica que la multiplicación de un vector con un número real es una operación conmutativa. Notemos que las reglas para la suma de vectores son las mismas que para la suma de números reales. Aunque los vectores usualmente se representan en términos de algún sistema de coordenadas, deseamos enfatizar que sus propiedades geométricas son independientes de él. En la Sección 4 presentamos explícitamente cálculos en las Álgebras Geométricas \mathbb{G}_2 y \mathbb{G}_3 , empleando los sistemas de coordenadas ortonormales de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , respectivamente.

2 Producto geométrico de vectores

El significado geométrico de la suma de vectores se representa en las Figuras 1 y 2, y lo formalizamos a través de las reglas (A1) - (A5). Pero, ¿qué hay acerca de la multiplicación entre vectores? Sumamos y multiplicamos números reales,

¿por qué no podríamos hacer lo mismo con vectores? Veamos cómo multiplicar vectores de una forma geoméricamente consistente.

Recordemos que, para todo vector, $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\hat{\mathbf{a}}$. Elevando al cuadrado esta igualdad, obtenemos

$$\mathbf{a}^2 = (|\mathbf{a}|\hat{\mathbf{a}})(|\mathbf{a}|\hat{\mathbf{a}}) = |\mathbf{a}|^2\hat{\mathbf{a}}^2 = |\mathbf{a}|^2. \quad (1)$$

En el último paso, hemos introducido una *nueva regla* que establece que el cuadrado de un vector unitario da como resultado el escalar $+1$. Esto es siempre cierto para *vectores euclidianos* unitarios, que son aquellos con los que estamos más familiarizados.¹ Bajo esta premisa se sigue inmediatamente que el cuadrado de un vector euclideo es igual a su *magnitud* o *longitud* al cuadrado, $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y es cero sólo cuando su longitud es nula.

Dividiendo ambos lados de la ecuación (1) por $|\mathbf{a}|^2$, obtenemos

$$\frac{\mathbf{a}^2}{|\mathbf{a}|^2} = \mathbf{a} \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \mathbf{a} = 1, \quad (2)$$

o

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{a} = 1$$

donde

$$\mathbf{a}^{-1} := \frac{1}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{\hat{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|} \quad (3)$$

es el *inverso multiplicativo* del vector \mathbf{a} . Por supuesto, el inverso de un vector sólo está definido para vectores diferentes de cero.

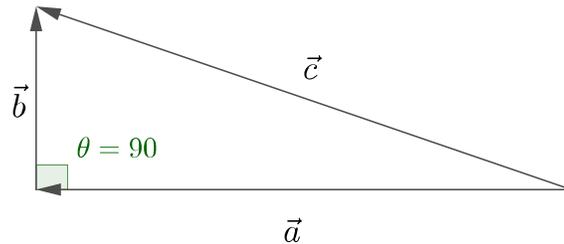


Figure 3: Triángulo rectángulo con lados $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Consideremos ahora el triángulo rectángulo de la Figura 3. Los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} a lo largo de sus lados satisfacen la ecuación

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}. \quad (4)$$

El más venerado teorema de las antiguas Matemáticas griegas, el Teorema de Pitágoras, establece que las longitudes $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $|\mathbf{c}|$ de los lados de este triángulo

¹Los *vectores espacio-temporales* de la *Teoría de la Relatividad* de Einstein, así como los vectores en otras *geometrías no-euclidianas*, tienen vectores unitarios cuyo cuadrado es igual a -1 .

rectángulo satisfacen la famosa relación $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2$. Asumiendo las reglas usuales de la suma y multiplicación de números reales, excepto la conmutatividad del producto, elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación vectorial (4) para obtener lo siguiente:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ba} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 \iff |\mathbf{a}|^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ba} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2,$$

de lo cual concluimos que $\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}$. Hemos establecido así que el producto geométrico de dos vectores euclidianos ortogonales \mathbf{a} y \mathbf{b} debe ser *anti-conmutativo*, para que la validez del Teorema de Pitágoras se mantenga.

Dados los vectores ortogonales \mathbf{a} y \mathbf{b} , avancemos un paso más y demos a la nueva entidad $\mathbf{B} := \mathbf{ab}$ la interpretación geométrica de un *segmento de plano con dirección*, o *bivector*, siendo su dirección la del plano en el cual se encuentran los vectores. En la Figura 4 están representados los bivectores \mathbf{B} y su *inverso aditivo* $\mathbf{ba} = -\mathbf{ab} = -\mathbf{B}$. Así como la orientación de un vector se determina por la dirección del segmento de línea, las *orientaciones* de los bivectores $\mathbf{B} = \mathbf{ab}$ y $-\mathbf{B} = \mathbf{ba}$ se determinan por la orientación de sus lados, como se muestra en la figura.

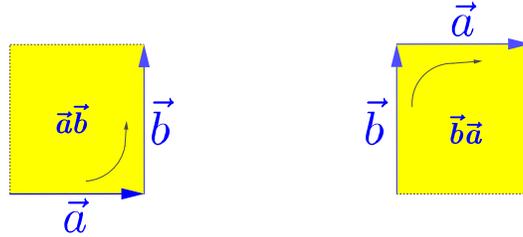


Figure 4: Los bivectores \mathbf{ab} y \mathbf{ba} definidos por los vectores ortogonales \mathbf{a} y \mathbf{b} .

Hemos dicho que el vector $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\hat{\mathbf{v}}$ tiene asociados el vector unitario $\hat{\mathbf{v}}$ y la longitud $|\mathbf{v}|$, y que $\mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2$. Elevando al cuadrado el bivector $\mathbf{B} = \mathbf{ab}$ obtenemos

$$\mathbf{B}^2 = (\mathbf{ab})(\mathbf{ab}) = -\mathbf{abba} = -\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 = -|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 = -|\mathbf{B}|^2 \quad (5)$$

lo que representa el *negativo* del área encerrada por el rectángulo cuyos lados están definidos por los vectores ortogonales \mathbf{a} y \mathbf{b} . En consecuencia,

$$\mathbf{B} = |\mathbf{B}|\hat{\mathbf{B}}, \quad (6)$$

donde $|\mathbf{B}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ es el área del segmento de plano dirigido, y su dirección es la del *bivector unitario* $\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}$, con

$$\hat{\mathbf{B}}^2 = (\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}})(\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}) = \hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{b}} = -\hat{\mathbf{a}}^2\hat{\mathbf{b}}^2 = -1$$

2.1 El producto interno

Consideremos ahora el triángulo general de la Figura 5, con los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} representando sus lados y satisfaciendo la ecuación vectorial $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Elevando al cuadrado ambos lados obtenemos

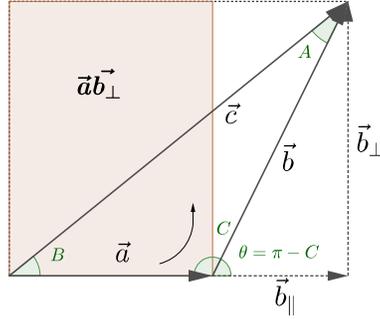


Figure 5: Ley de los Cosenos.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 \iff |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2,$$

expresión que se conoce como *Ley de los Cosenos*, en la cual

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta, \quad (7)$$

es el *producto interno* o *producto punto* de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} . En la Figura 5, la medida del ángulo $-\pi \leq \theta \leq \pi$ se considera del vector \mathbf{a} al vector \mathbf{b} , de tal forma que

$$\cos \theta = -\cos(\pi - \theta) = -\cos C = \cos(-\theta),$$

y así, el signo del ángulo no es relevante. Notemos que (7) nos permite invertir el orden del producto geométrico,

$$\mathbf{b}\mathbf{a} = -\mathbf{a}\mathbf{b} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (8)$$

Hasta ahora, para desarrollar el producto geométrico de vectores, hemos utilizado las reglas usuales de la multiplicación de números reales, pero no hemos asumido que la multiplicación vectorial sea universalmente conmutativa. De hecho, el Teorema de Pitágoras nos indica que $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{c}|^2$ se verifica sólo para el triángulo rectángulo; es decir, cuando $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ o, equivalentemente, cuando los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} son ortogonales y anti-conmutan.

Éste es un buen momento para resumir las reglas que hemos desarrollado del producto geométrico de vectores. Sean los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} ,

(P1) $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$ *El cuadrado de un vector es su magnitud al cuadrado*

(P2) $\mathbf{a}\mathbf{b} = -\mathbf{b}\mathbf{a}$ *Define el bivector $\mathbf{B} = \mathbf{a}\mathbf{b}$ cuando \mathbf{a} y \mathbf{b} son vectores ortogonales*

- (P3) $\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$ *Distributividad por izquierda*
- (P4) $(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} + \mathbf{ca}$ *Distributividad por derecha*
- (P5) $\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{abc}$ *Asociatividad del producto*
- (P6) $0\mathbf{a} = 0 = \mathbf{a}0$ *La multiplicación de un vector por cero es cero*
- (P7) $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{a}\alpha$, for $\alpha \in \mathbb{R}$ *La multiplicación de un vector con un escalar es conmutativa*

2.2 El producto exterior

Hasta ahora la presentación se ha dado de una manera clara y concisa. El producto interno de dos vectores se ha identificado como la mitad de su producto simétrico. Para descubrir la interpretación geométrica del producto anti-simétrico de los vectores \mathbf{a} and \mathbf{b} hagamos

$$\mathbf{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) + \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (9)$$

en la cual $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba})$ denota el *producto exterior* (o *producto cuña*) de \mathbf{a} y \mathbf{b} . El producto exterior es *anti-simétrico*, pues $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. De hecho, cuando se verifica que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, el producto geométrico se reduce al producto exterior; es decir,

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{ba} \quad (10)$$

Es natural darle a $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ la interpretación de un *segmento de plano con dirección* o *bivector*. Para ver esto claramente, hagamos $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}$, donde $\mathbf{b}_{\parallel} = s\mathbf{a}$, para cierta $s \in \mathbb{R}$, es la componente vectorial de \mathbf{b} paralela a \mathbf{a} , mientras que \mathbf{b}_{\perp} es la componente vectorial de \mathbf{b} perpendicular al vector \mathbf{a} . Calculando \mathbf{ab} encontramos lo siguiente:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a}(\mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}) = \mathbf{ab}_{\parallel} + \mathbf{ab}_{\perp} = s\mathbf{a}^2 + \mathbf{ab}_{\perp} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

Igualando los componentes escalar y bivectorial, obtenemos:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = s\mathbf{a}^2 \quad \text{and} \quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{ab}_{\perp} \quad (11)$$

Concluimos que $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{ab}_{\perp}$ es el bivector resultante del producto de los vectores ortogonales \mathbf{a} y \mathbf{b}_{\perp} , mostrados en la Figura 5. El bivector definido por el paralelogramo orientado $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, cuyos lado son \mathbf{a} and \mathbf{b} , tiene exactamente la misma orientación y área que el bivector definido por el rectángulo dirigido \mathbf{ab}_{\perp} , de lados \mathbf{a} y \mathbf{b}_{\perp} .

Ya hemos establecido que el cuadrado de un vector es su magnitud al cuadrado, $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$. ¿Qué hay acerca del cuadrado del bivector ($\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$)? Utilizando la relación (11), encontramos que

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = (\mathbf{ab}_{\perp})^2 = -\mathbf{a}^2\mathbf{b}_{\perp}^2 = -|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|^2 \quad (12)$$

en concordancia con (5). Si el bivector se encuentra en el plano xy del bivector unitario $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, donde los vectores unitarios \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 se localizan a lo largo de los ejes ortogonales x y y , respectivamente, entonces $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{e}_{12}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$, véase la Figura 6. El producto geométrico en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 se discutirá en la Sección 3.

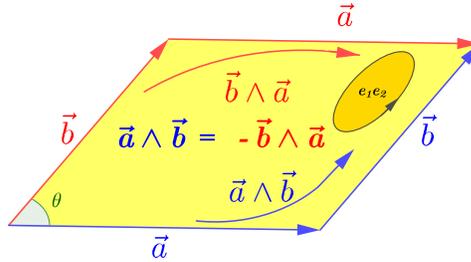


Figure 6: Orientación de un bivector. El *área*, o *magnitud* del bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$, donde $-\pi \leq \theta < \pi$, y su orientación es la del bivector unitario $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Notemos que la *forma* del bivector $\mathbf{e}_{12} := \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ no es importante, sólo el plano en el cual se encuentra y su orientación.

Así como la suma de vectores genera un vector, la suma de bivectores resulta en un bivector. La Figura 7 muestra la suma de los bivectores

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c},$$

y asimismo ilustra la *propiedad distributiva* del producto exterior sobre la suma de los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} .

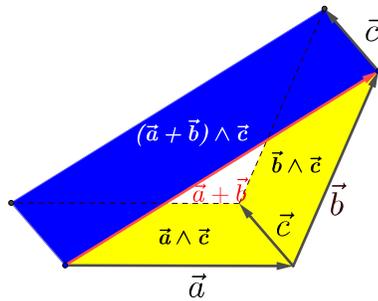


Figure 7: El producto cuña es distributivo sobre la adición vectorial.

2.3 Propiedades de los productos interno y exterior

Dado que el triángulo de la Figura 5 satisface la ecuación vectorial

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c},$$

si aplicamos a ambos lados sucesivamente el producto exterior con los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} , obtenemos lo siguiente:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{a}, \quad \text{and} \quad \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$$

o equivalentemente,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$$

Notemos que el área del triángulo en cuestión está dada por $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$, lo cual es la mitad del área del paralelogramo $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, de manera que la última ecuación refleja la equivalencia entre paralelogramos.

Dividiendo cada término de la última igualdad por $|\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$ obtenemos:

$$\frac{\hat{\mathbf{a}} \wedge \hat{\mathbf{b}}}{|\mathbf{c}|} = \frac{\hat{\mathbf{c}} \wedge \hat{\mathbf{b}}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\hat{\mathbf{a}} \wedge \hat{\mathbf{c}}}{|\mathbf{b}|} \implies \frac{|\hat{\mathbf{a}} \wedge \hat{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{c}|} = \frac{|\hat{\mathbf{c}} \wedge \hat{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|\hat{\mathbf{a}} \wedge \hat{\mathbf{c}}|}{|\mathbf{b}|}.$$

Dados los ángulos $0 \leq A, B, C \leq \pi$,

$$|\hat{\mathbf{a}} \wedge \hat{\mathbf{b}}| = \sin C = \sin(\pi - C), \quad |\hat{\mathbf{c}} \wedge \hat{\mathbf{b}}| = \sin A, \quad \text{y} \quad |\hat{\mathbf{a}} \wedge \hat{\mathbf{c}}| = \sin B,$$

de donde se deduce que

$$\frac{\sin A}{|\mathbf{a}|} = \frac{\sin B}{|\mathbf{b}|} = \frac{\sin C}{|\mathbf{c}|}$$

lo que se conoce como *Ley de los Senos*, véase la Figura 8.

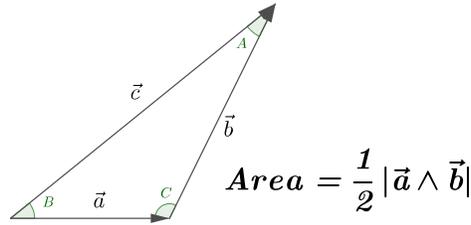


Figure 8: Ley de los Senos.

En (9), descubrimos que el producto geométrico de dos vectores se descompone en dos partes, una parte *escalar* simétrica $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y una parte *bivectorial* anti-simétrica $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Parece natural preguntarse si el producto geométrico de un vector \mathbf{a} con un bivector $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ tiene una descomposición similar. Análogamente a (9), hacemos

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \quad (13)$$

donde para este caso,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) := \frac{1}{2}(\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a}) =: -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \quad (14)$$

es la parte *anti-simétrica* y

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) := \frac{1}{2} \left(\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a} \right) =: (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \wedge \mathbf{a} \quad (15)$$

es la parte *simétrica*.

Para entender mejor esta descomposición, consideremos cada parte por separado. Empecemos con $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a}_{\parallel}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$; demostraremos en primer lugar que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}. \quad (16)$$

Descomponiendo el miembro izquierdo de esta ecuación, con ayuda de (14) y (9), obtenemos:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a} \right) = \frac{1}{4}(\mathbf{abc} - \mathbf{acb} - \mathbf{bca} + \mathbf{cba}).$$

Descomponiendo el miembro derecho, resulta:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left((\mathbf{ab} + \mathbf{ba})\mathbf{c} + \mathbf{c}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) - (\mathbf{ac} + \mathbf{ca})\mathbf{b} - \mathbf{b}(\mathbf{ac} + \mathbf{ca}) \right) \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{abc} - \mathbf{acb} - \mathbf{bca} + \mathbf{cba}), \end{aligned}$$

lo cual coincide con el miembro izquierdo. La interpretación geométrica de (14) se muestra en la Figura 9.

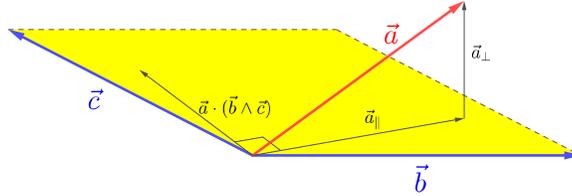


Figure 9: El resultado de $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ es el vector \mathbf{a} proyectado sobre el plano de $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ y rotado 90 grados en él.

En lo que respecta al triple producto exterior (15), debemos demostrar la propiedad asociativa, $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$. Descomponiendo ambos miembros de esta ecuación, usando (10) y (15), resulta lo siguiente:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) := \frac{1}{2} \left(\mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})\mathbf{a} \right) = \frac{1}{4} \left(\mathbf{a}(\mathbf{bc} - \mathbf{cb}) + (\mathbf{bc} - \mathbf{cb})\mathbf{a} \right),$$

y

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} := \frac{1}{2} \left((\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{c} + \mathbf{c}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \right) = \frac{1}{4} \left((\mathbf{ab} - \mathbf{ba})\mathbf{c} + \mathbf{c}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \right).$$

Para finalizar la demostración, observemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} &= \frac{1}{4} \left(-\mathbf{acb} - \mathbf{cab} + \mathbf{bca} + \mathbf{bac} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} + \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \right) = 0. \end{aligned}$$

El *trivector* o *volumen dirigido* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ se muestra en la Figura 10. Hay muchas más identidades similares en Álgebras Geométricas multidimensionales [7, 11].

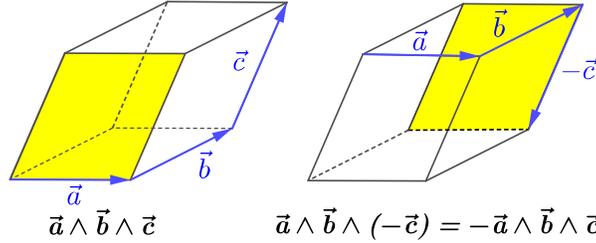


Figure 10: El signo del vector \mathbf{c} determina la orientación del trivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ según la *regla de la mano derecha* o *izquierda*.

Ejercicio: Empleando los resultados (15) y (16), demuestre la propiedad asociativa (P5) del producto geométrico de vectores,

$$\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c}$$

3 Las Álgebras Geométricas \mathbb{G}_1 , \mathbb{G}_2 y \mathbb{G}_3 .

En la sección anterior, descubrimos dos principios generales para la multiplicación de vectores euclidianos \mathbf{a} y \mathbf{b} :

- 1) El cuadrado de un vector es igual a su longitud al cuadrado, $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.
- 2) Si los vector \mathbf{a} y \mathbf{b} son ortogonales entre sí, esto es, si el ángulo entre ellos es de 90 grados, entonces se dice que anti-conmutan entre sí, o sea, $\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}$ y definen el bivector mencionado en (6).

Esas dos reglas generales se mantienen válidas para vectores euclidianos, independientemente de la dimensión del espacio en que se encuentren.

El Álgebra Geométrica euclidiana más simple, que se obtiene extendiendo el sistema numérico real \mathbb{R} al incluir una nueva y única raíz cuadrada de $+1$, es el Álgebra Geométrica

$$\mathbb{G}_1 := \mathbb{R}(\mathbf{e}),$$

donde $\mathbf{e}^2 = 1$. Entonces, un número geométrico en \mathbb{G}_1 tiene la forma

$$g = x + y\mathbf{e},$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$, y define lo que se conoce como *número hiperbólico* [9].

Ahora aplicaremos lo que hemos aprendido en general acerca de la adición y multiplicación vectoriales a vectores tanto en el plano bidimensional \mathbb{R}^2 como, por supuesto, en el espacio cotidiano tridimensional \mathbb{R}^3 . Comencemos con el *plano de coordenadas* bidimensional definido por

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}. \quad (17)$$

Superponiendo los *vectores unitarios ortonormales* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a lo largo de los ejes coordenados x, y respectivamente, cada punto

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \iff \mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2 \quad (18)$$

se convierte en un *vector de posición* $\mathbf{x} = |\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$ del origen al punto en cuestión, como se muestra en la Figura 11, junto con el círculo unitario. El punto $\hat{\mathbf{x}} = (\cos \theta, \sin \theta)$ en el círculo unitario S^1 , donde el ángulo θ está medido desde el eje x , se convierte entonces en el vector unitario

$$\hat{\mathbf{x}} = \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2.$$

En la ecuación (18) hemos abusado de la notación, al igualar el punto coordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con el *vector de posición* $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ desde el origen de \mathbb{R}^2 .

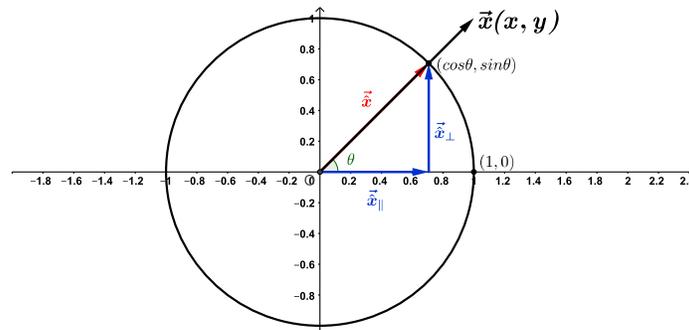


Figure 11: El círculo unitario S^1 en el plano xy .

Calculando entonces el producto geométrico de dos vectores

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2) = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2,$$

en el plano xy , obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) \\
 &= a_1b_1\mathbf{e}_1^2 + a_2b_2\mathbf{e}_2^2 + a_1b_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_2b_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \\
 &= (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \quad (19)
 \end{aligned}$$

donde reconocemos el producto interno $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$, y el producto exterior

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_{12}|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$$

para $\mathbf{e}_{12} := \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$. El bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ se muestra en la Figura 12, junto con la demostración gráfica de que $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |a_1b_2 - a_2b_1|$, como era de esperarse.

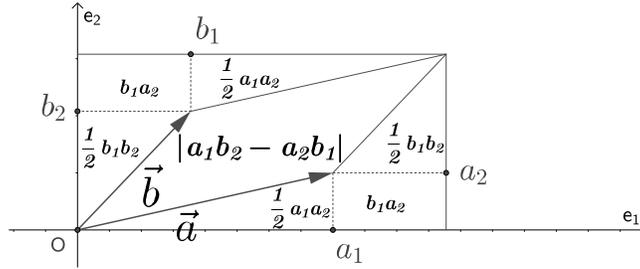


Figure 12: El producto exterior $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ en 2 dimensiones.

Al introducir los vectores unitarios $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a lo largo de los ejes coordenados de \mathbb{R}^2 y usar las propiedades del producto geométrico, hemos encontrado fórmulas explícitas para el producto punto y el producto exterior de cualesquiera dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} en \mathbb{R}^2 . Del producto geométrico de los vectores unitarios ortogonales \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 resulta el bivector unitario \mathbf{e}_{12} , mostrado ya en la Figura 6. Elevando \mathbf{e}_{12} al cuadrado, obtenemos

$$\mathbf{e}_{12}^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1^2\mathbf{e}_2^2 = -1,$$

lo cual, debido a (5) y (12), no debe sorprendernos.

El número geométrico más general del plano euclidiano bidimensional \mathbb{R}^2 es

$$g = g_0 + g_1\mathbf{e}_1 + g_2\mathbf{e}_2 + g_3\mathbf{e}_{12},$$

donde $g_\mu \in \mathbb{R}$ para $\mu = 0, 1, 2, 3$. El conjunto de todos los números geométricos g , junto con las dos operaciones geométricas de adición y multiplicación, constituyen el *Álgebra Geométrica* \mathbb{G}_2 del plano euclidiano \mathbb{R}^2 ,

$$\mathbb{G}_2 := \{g \mid g = g_0 + g_1\mathbf{e}_1 + g_2\mathbf{e}_2 + g_3\mathbf{e}_{12}\} = \mathbb{R}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2).$$

Las reglas formales para la adición y multiplicación geométrica de números geométricos en \mathbb{G}_2 son exactamente las mismas que para la adición y multiplicación de números reales, con la excepción de la conmutatividad universal de éstos, debido a la anti-conmutatividad natural de los vectores.

El Álgebra Geométrica \mathbb{G}_2 se descompone en dos partes,

$$\mathbb{G}_2 = \mathbb{G}_2^0 + \mathbb{G}_2^1 + \mathbb{G}_2^2 = \mathbb{G}_2^+ + \mathbb{G}_2^-,$$

donde la *parte par*, consiste de *escalares* (números reales) y bivectores,

$$\mathbb{G}_2^+ := \mathbb{G}_2^{0+2} = \{x + y\mathbf{e}_{12} \mid x, y \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{C}$$

y es algebraicamente cerrada e isomorfa al campo de los números complejos \mathbb{C} , y la *parte impar*,

$$\mathbb{G}_2^- := \mathbb{G}_2^1 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2\} \cong \mathbb{R}^2$$

donde para $x, y \in \mathbb{R}$, se forman vectores en el plano xy \mathbb{R}^2 . El Álgebra Geométrica \mathbb{G}_2 unifica el plano vectorial \mathbb{G}_2^- y el plano de los números complejos \mathbb{G}_2^+ en un mismo plano de un sistema numérico geométrico \mathbb{G}_2 .

Al introducir un tercer vector unitario \mathbf{e}_3 en \mathbb{R}^2 , a lo largo del eje z , obtenemos el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 . Todas las fórmulas hasta ahora encontradas en \mathbb{R}^2 se pueden entonces extender a \mathbb{R}^3 , y por el mismo proceso se pueden generalizar a cualquier espacio n -dimensional superior \mathbb{R}^n , donde $n > 3$. En general, se puede siempre extender cualquier Álgebra Geométrica a dimensiones superiores, simplemente agregando un nuevo vector unitario anti-conmutativo y ortogonal a los anteriores, cuyo cuadrado sea ± 1 , [14, 15].

Veamos ahora cómo las fórmulas (19) funcionan explícitamente en

$$\mathbb{R}^3 := \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3\}, \quad (20)$$

donde $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dados los vectores

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3,$$

calculemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) \\ &= a_1b_1\mathbf{e}_1^2 + a_2b_2\mathbf{e}_2^2 + a_3b_3\mathbf{e}_3^2 \\ &\quad + a_1b_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_2b_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + a_2b_3\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + a_3b_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + a_1b_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + a_3b_1\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12} + (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_{23} + (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{e}_{13} \end{aligned}$$

donde el *producto punto* o *producto interior* es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta,$$

y el producto exterior (11) corresponde a

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_{12} + (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_{23} + (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{e}_{13} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\hat{\mathbf{B}} \sin \theta. \quad (21)$$

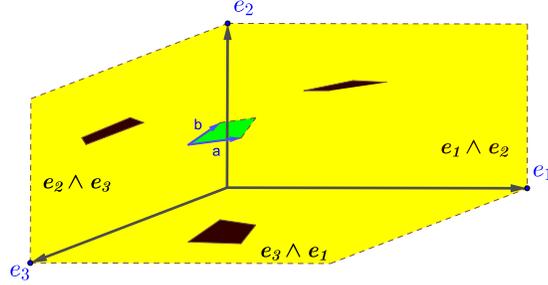


Figure 13: Decomposición de un bivector en el espacio $3D$.

En la Figura 13 se muestran los tres componentes bivectores, los cuales son proyecciones sobre los planos asociados a los ejes coordenados.

En \mathbb{R}^3 , el producto exterior $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ se puede también expresar en términos del ya (desde hace un siglo) conocido *producto cruz* del análisis vectorial de Gibbs-Heaviside, el cual data de una época anterior a la de Einstein. El producto cruz entre dos vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} está definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &:= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 \\ &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (22)$$

donde $\hat{\mathbf{n}} := \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$.

Definiendo el *trivector unitario* o *seudoscalar* de \mathbb{R}^3 ,

$$I := \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{123}, \quad (23)$$

las fórmulas (21) y (22) pueden ser combinadas de la siguiente forma:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = I(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta I \hat{\mathbf{n}}, \quad (24)$$

como puede verificarse fácilmente. Decimos que el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el *dual* del bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, o su *normal según la regla de la mano derecha*, y ambos se muestran en la Figura 14. Notemos el uso del símbolo $I = \mathbf{e}_{123}$ para el trivector unitario o *seudoscalar* de \mathbb{G}_3 para distinguirlo de $i = \mathbf{e}_{12}$, el bivector unitario de \mathbb{G}_2 .

Hemos visto en (9) que el producto geométrico de dos vectores se decompone en dos partes, una escalar y una vectorial. Calculemos ahora el producto geométrico de tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c} &= \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}. \end{aligned}$$

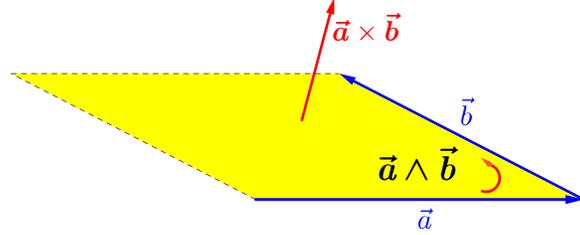


Figure 14: El vector producto cruz $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el dual *normal según la regla de la mano derecha* del bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = I(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Asimismo, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$.

Este resultado nos muestra que el producto geométrico de tres vectores consiste en una parte vectorial

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b}$$

y en una parte trivectorial $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$.

Dados los vectores

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3,$$

la parte trivectorial viene dada por

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_{123} = ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c})I. \quad (25)$$

Al hablar de la *base estándar* del Álgebra Geométrica \mathbb{G}_3 del espacio euclidiano tridimensional \mathbb{R}^3 , nos referimos a

$$\mathbb{G}_3 := \text{span}_{\mathbb{R}}\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{13}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{123}\} = \mathbb{R}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

Un número geométrico cualquiera en \mathbb{G}_3 tiene la forma

$$g = g_0 + \mathbf{v} + B + T,$$

donde $g_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ es un vector, $B = b_{12}\mathbf{e}_{12} + b_{23}\mathbf{e}_{23} + b_{13}\mathbf{e}_{13}$ es un bivector, y $T = tI$, para $t \in \mathbb{R}$, es un *trivector* o *elemento de volumen dirigido*. Notemos que no sólo el bivector unitario $i = \mathbf{e}_{12}$ tiene como cuadrado $i^2 = -1$, sino que también para el trivector unitario $I = \mathbf{e}_{123}$ se cumple la relación $I^2 = -1$, como podemos comprobar con el cálculo siguiente:

$$I^2 = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3^2 = (-1)(+1) = -1.$$

Otra propiedad importante del seudoscalar I es que conmuta con todos los vectores en \mathbb{R}^3 , y en consecuencia con todos los números geométricos en \mathbb{G}_3 .

4 Geometría Analítica

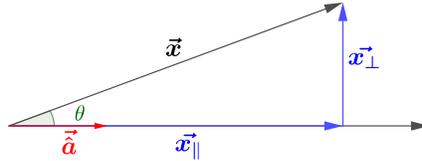


Figure 15: Descomposición del vector \mathbf{x} en componentes paralela y perpendicular respecto al vector $\hat{\mathbf{a}}$.

Dado un vector \mathbf{x} y un vector unitario $\hat{\mathbf{a}}$, queremos encontrar una expresión para $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$, donde \mathbf{x}_{\parallel} es paralelo a $\hat{\mathbf{a}}$ y \mathbf{x}_{\perp} es perpendicular a $\hat{\mathbf{a}}$, como se muestra en la Figura 15. Usando la ley asociativa y, dado que $\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}} = 1$, obtenemos:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}\hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}} + (\mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}, \quad (26)$$

donde

$$\mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_{\perp} = (\mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}.$$

Podemos igualmente calcular esta descomposición haciendo

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{a}}\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x}) + \hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}.$$

Se sigue entonces que $\mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{a}})$, como era de esperarse, y

$$\mathbf{x}_{\perp} = (\mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{a}}) \cdot \hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \wedge \mathbf{x}) = -\hat{\mathbf{a}} \cdot (\mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{a}}),$$

en acuerdo con (16).

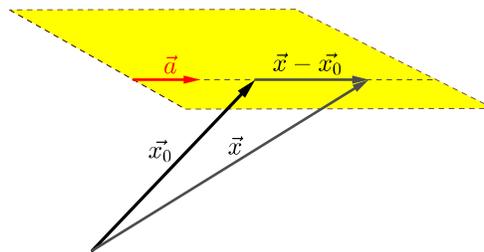


Figure 16: La línea $L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{a})$ que pasa por el punto \mathbf{x}_0 en la dirección \mathbf{a} .

Uno de los problemas más simples de la Geometría Analítica es: dado un vector \mathbf{a} y un punto \mathbf{x}_0 , ¿cuál es la ecuación de la recta que pasa a través del punto \mathbf{x}_0 en la dirección del vector \mathbf{a} ? La recta $L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{a})$ está dada por

$$L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{a}) := \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{a} = 0\}.$$

y su ecuación es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a},$$

para $t \in \mathbb{R}$, como se aprecia en la Figura 16.

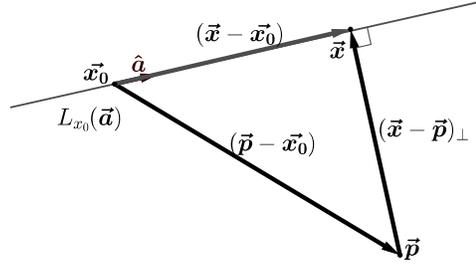


Figure 17: La distancia del punto \mathbf{p} desde la recta $L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{a})$ es $|\mathbf{x} - \mathbf{p}|$.

Dada la recta $L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{a})$ y un punto \mathbf{p} , encontremos el punto \mathbf{x} en la recta $L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{a})$ más cercano a \mathbf{p} y calculemos la distancia $|\mathbf{x} - \mathbf{p}|$. Haciendo referencia a la Figura 17, y usando la descomposición (26) para proyectar $\mathbf{p} - \mathbf{x}_0$ sobre el vector $\hat{\mathbf{a}}$, encontramos

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + [(\mathbf{p} - \mathbf{x}_0) \cdot \hat{\mathbf{a}}]\hat{\mathbf{a}},$$

y así, con ayuda de (9) y (26),

$$\mathbf{x} - \mathbf{p} = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}) - [(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{a}}]\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{p})_{\perp}, \quad (27)$$

donde $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p})_{\perp}$ es la componente de $\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}$ perpendicular al vector \mathbf{a} . Usando (27), la distancia del punto \mathbf{p} a la recta es

$$|\mathbf{x} - \mathbf{p}| = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{p})^2} = \sqrt{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p})^2 - ((\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}) \cdot \hat{\mathbf{a}})^2} = |(\mathbf{x}_0 - \mathbf{p})_{\perp}|,$$

como se muestra en la Figura 17.

4.1 La función exponencial y las rotaciones

La función exponencial de Euler aparece naturalmente en el producto geométrico (9). Con la ayuda de (7) y (24), y notando que $(I\hat{\mathbf{n}})^2 = -1$, el producto geométrico de dos vectores unitarios $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\mathbf{b}}$ en \mathbb{R}^3 se puede expresar como

$$\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} + \hat{\mathbf{a}} \wedge \hat{\mathbf{b}} = \cos \theta + I\hat{\mathbf{n}} \sin \theta = e^{\theta I\hat{\mathbf{n}}}, \quad (28)$$

donde $\cos \theta := \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}$. Similarmente,

$$\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{b}} \wedge \hat{\mathbf{a}} = \cos \theta - I\hat{\mathbf{n}} \sin \theta = e^{-\theta I\hat{\mathbf{n}}}. \quad (29)$$

Sean los vectores unitarios $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}$ en \mathbb{R}^3 . La ecuación

$$(\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{b}}(\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}) = \hat{\mathbf{b}} = (\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{a}}(\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}), \quad (30)$$

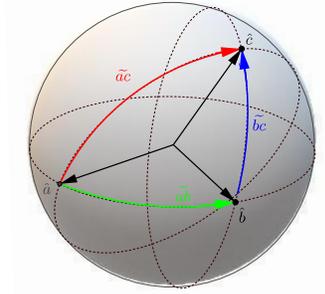


Figure 18: Sobre la esfera unitaria el arco $\widetilde{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}$, seguido del arco $\widetilde{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{c}}}$, genera el arco $\widetilde{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{c}}}$.

muestra que, cuando el vector $\hat{\mathbf{a}}$ es multiplicado por derecha por $\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} = e^{\theta I\hat{\mathbf{n}}}$ o por izquierda por $\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}} = e^{-\theta I\hat{\mathbf{n}}}$, éste rota θ grados en dirección del vector $\hat{\mathbf{b}}$. La composición de rotaciones se puede visualizar como la composición de arcos sobre la esfera unitaria. La composición del arco $\widetilde{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}$, conectando los puntos $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\mathbf{b}}$ sobre el gran círculo, con el arco $\widetilde{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{c}}}$, conectando $\hat{\mathbf{b}}$ y $\hat{\mathbf{c}}$, genera el arco $\widetilde{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{c}}}$, conectando a su vez $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\mathbf{c}}$. Simbólicamente,

$$\widetilde{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}\widetilde{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{c}}} := (\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}})(\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{c}}) = \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{c}} =: \widetilde{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{c}}},$$

como se muestra en la Figura 18.

Al tomar la raíz cuadrada de ambos lados de las ecuaciones (28) y (29), se sigue que

$$\sqrt{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}} = e^{\frac{1}{2}\theta I\hat{\mathbf{n}}} \quad \text{y} \quad \sqrt{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}} = e^{-\frac{1}{2}\theta I\hat{\mathbf{n}}}.$$

Por otra parte,

$$\hat{\mathbf{b}} = (\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}} = (\sqrt{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}})^2\hat{\mathbf{a}} = \sqrt{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{a}}\sqrt{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}} = e^{-\frac{1}{2}\theta I\hat{\mathbf{n}}}\hat{\mathbf{a}}e^{\frac{1}{2}\theta I\hat{\mathbf{n}}}. \quad (31)$$

La ventaja de la ecuación (31) sobre (30) consiste en que ésta se puede aplicar a rotaciones de cualquier vector \mathbf{x} . Para $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$, donde \mathbf{x}_{\parallel} se encuentra en el plano de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, y \mathbf{x}_{\perp} es perpendicular a dicho plano obtenemos, con ayuda de (14) y (15), lo siguiente:

$$\mathbf{x}_{rot} := \sqrt{\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}}}\mathbf{x}\sqrt{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}} = e^{-\frac{1}{2}\theta I\hat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp})e^{\frac{1}{2}\theta I\hat{\mathbf{n}}} = e^{-\theta I\hat{\mathbf{n}}}\mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}, \quad (32)$$

vea la Figura 19. La fórmula (32) es conocida como la representación de *medio ángulo* de una rotación [11, p.55]. Una rotación puede asimismo ser expresada como la composición de dos reflexiones.

4.2 Reflexiones

Un bivector caracteriza la dirección de un plano en el espacio. La ecuación del plano que pasa por el origen en la dirección del bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es

$$Plano_0(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0\}. \quad (33)$$

La condición $\mathbf{x} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ nos indica que \mathbf{x} se localiza en el plano del bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, es decir,

$$\mathbf{x} = t_a \mathbf{a} + t_b \mathbf{b},$$

donde $t_a, t_b \in \mathbb{R}$. Esta última expresión es la ecuación paramétrica de un plano que pasa por el origen en la dirección del bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Si, por otro lado, deseamos la ecuación del plano que pasa por un punto dado \mathbf{x}_0 con la misma dirección que el bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, tenemos lo siguiente:

$$Plano_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0\}, \quad (34)$$

con la correspondiente ecuación paramétrica

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_a \mathbf{a} + t_b \mathbf{b}.$$

Para el caso de un plano en \mathbb{R}^3 , donde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ y $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, usando (25) y (34), tenemos:

$$Plano_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \mid \det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 0\},$$

expresión equivalente a la bien conocida ecuación de una recta que pasa por un punto \mathbf{x}_0 ,

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el *vector normal* al bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ en el plano, como se ilustra en la Figura 20.

Dado un vector \mathbf{x} y un bivector unitario $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, podemos descomponer \mathbf{x} en una parte \mathbf{x}_{\parallel} paralela a $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, y otra parte \mathbf{x}_{\perp} , perpendicular a $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Debido a la relación (15), tenemos:

$$\mathbf{x}_{\parallel} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{\parallel} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{x}_{\parallel}) = 0,$$

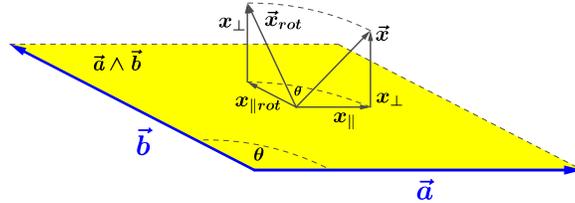


Figure 19: La componente paralela \mathbf{x}_{\parallel} de \mathbf{x} en el plano $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ es rotada θ grados, dejando sin cambio la componente perpendicular \mathbf{x}_{\perp} .

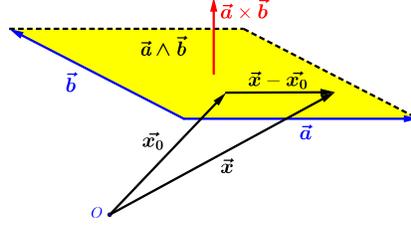


Figure 20: El punto \mathbf{x} se encuentra en el plano que pasa por el punto x_0 y posee la misma dirección que el bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

mientras que, debido a (14),

$$\mathbf{x}_\perp \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_\perp (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{x}_\perp) = 0,$$

de donde se sigue que las partes paralela y perpendicular de \mathbf{x} anti-conmutan y conmutan, respectivamente, con el bivector $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Recordando que $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = -1$, concluimos entonces lo siguiente:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{x} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) (\mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp) (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}_\perp, \quad (35)$$

la cual es la fórmula general para la reflexión de un vector \mathbf{x} en un espejo que estuviera en el plano del bivector unitario $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

En el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 , el bivector unitario es simplemente

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = I(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = I\hat{\mathbf{n}}.$$

En este caso, la reflexión (35) toma la forma

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \mathbf{x} (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = -\hat{\mathbf{n}} \mathbf{x} \hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{n}} (\mathbf{x}_\parallel + \mathbf{x}_\perp) \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{x}_\parallel - \mathbf{x}_\perp. \quad (36)$$

Dado que una rotación en \mathbb{R}^3 está generada por dos reflexiones consecutivas sobre dos planos con vectores unitarios normales $\hat{\mathbf{n}}_1$ y $\hat{\mathbf{n}}_2$, tenemos que

$$\mathbf{x}_{rot} = -\hat{\mathbf{n}}_2 (-\hat{\mathbf{n}}_1 \mathbf{x} \hat{\mathbf{n}}_1) \hat{\mathbf{n}}_2 = (\hat{\mathbf{n}}_2 \hat{\mathbf{n}}_1) \mathbf{x} (\hat{\mathbf{n}}_1 \hat{\mathbf{n}}_2). \quad (37)$$

Haciendo $\hat{\mathbf{n}}_1 \hat{\mathbf{n}}_2 = e^{\frac{1}{2} \theta I \hat{\mathbf{n}}}$, con

$$\hat{\mathbf{n}} := \frac{\hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2}{|\hat{\mathbf{n}}_1 \times \hat{\mathbf{n}}_2|},$$

la fórmula para la rotación (37) se convierte en

$$\mathbf{x}_{rot} = (\hat{\mathbf{n}}_2 \hat{\mathbf{n}}_1) \mathbf{x} (\hat{\mathbf{n}}_1 \hat{\mathbf{n}}_2) = e^{-\frac{1}{2} \theta I \hat{\mathbf{n}}} \mathbf{x} e^{\frac{1}{2} \theta I \hat{\mathbf{n}}} = e^{-\frac{1}{2} \theta I \hat{\mathbf{n}}} \mathbf{x}_\parallel e^{\frac{1}{2} \theta I \hat{\mathbf{n}}} + \mathbf{x}_\perp, \quad (38)$$

la cual es equivalente a (32).

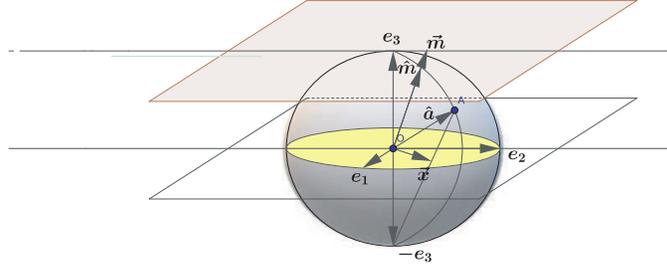


Figure 21: Proyección Estereográfica desde el Polo Sur hasta el plano xy , donde $\mathbf{m} = \mathbf{x} + \mathbf{e}_3$ y $\hat{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}$.

5 Proyección Estereográfica y un poco de Mecánica Cuántica

Como una demostración final de la flexibilidad y potencia del Álgebra Geométrica, discutiremos la proyección estereográfica desde la esfera unitaria $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ hacia \mathbb{R}^2 , definida por

$$S^2 := \{\hat{\mathbf{a}} \mid \hat{\mathbf{a}}^2 = 1 \text{ y } \hat{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^3\}.$$

El mapeo $\mathbf{x} = f(\hat{\mathbf{a}}) \in \mathbb{R}^2$ que define la proyección estereográfica es

$$\mathbf{x} = f(\hat{\mathbf{a}}) := \frac{2}{\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e}_3} - \mathbf{e}_3, \text{ donde } \hat{\mathbf{a}} \in S^2, \quad (39)$$

y se muestra en la Figura 21. En la Figura 22 se muestra un corte $2D$ en el plano del gran círculo definido por los puntos \mathbf{e}_3 , $\hat{\mathbf{a}}$ y el origen.

La proyección estereográfica es un ejemplo de *mapeo conforme*, es decir, una transformación que preserva ángulos, y tiene aplicaciones muy importantes en Matemáticas, Física y, recientemente, en el área de Robótica [2, 10].

Al trabajar con la ecuación (39), resulta conveniente introducir la nueva variable $\mathbf{m} = \mathbf{x} + \mathbf{e}_3$, con la cual el mapeo toma la forma más simple

$$\mathbf{m} = \frac{2}{\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e}_3} = \frac{2(\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e}_3)}{(\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e}_3)^2} = \frac{\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e}_3}{1 + \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{e}_3}. \quad (40)$$

El efecto de este cambio de variable es el de mapear cada punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ al correspondiente punto \mathbf{m} sobre el plano $Plano_{\mathbf{e}_3}(\mathbf{e}_{12})$ que pasa por el punto \mathbf{e}_3 y es paralelo a $\mathbb{R}^2 = Plano_0(\mathbf{e}_{12})$. Notemos que

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{m} = \mathbf{e}_3 \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e}_3}{1 + \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{e}_3} \right) = 1,$$

y, resolviendo la ecuación (40) para $\hat{\mathbf{a}}$ obtenemos, con ayuda de (3) y (8), lo siguiente:

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{2}{\mathbf{m}} - \mathbf{e}_3 = \mathbf{m}^{-1}(2 - \mathbf{m}\mathbf{e}_3)$$

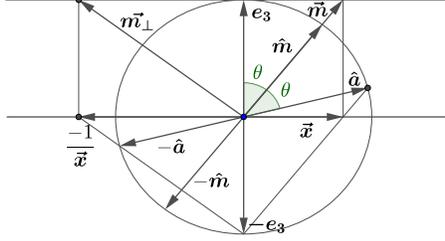


Figure 22: Un corte $2D$ en el plano del gran círculo a través de los puntos \mathbf{e}_3 , $\hat{\mathbf{a}}$ y $-\hat{\mathbf{a}}$ en S^2 .

$$= \frac{\hat{\mathbf{m}}}{|\mathbf{m}|} (2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{m} - 2\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{m}) = \hat{\mathbf{m}} \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{m}}. \quad (41)$$

Asimismo, encontramos que

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{m}} \mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{m}} = (\hat{\mathbf{m}} \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 (\mathbf{e}_3 \hat{\mathbf{m}}) = (-I \hat{\mathbf{m}}) \mathbf{e}_3 (I \hat{\mathbf{m}}), \quad (42)$$

lo cual nos muestra que el vector unitario $\hat{\mathbf{a}}$ se obtiene por la rotación de \mathbf{e}_3 en el plano $\hat{\mathbf{m}} \wedge \mathbf{e}_3$ con un ángulo de 2θ , donde $\cos \theta := \mathbf{e}_3 \cdot \hat{\mathbf{m}}$ o, equivalentemente, por una rotación de \mathbf{e}_3 en el plano $I \hat{\mathbf{m}}$ con un ángulo de π .

La Mecánica Cuántica presenta muchas propiedades sorprendentes, asombrosas y casi mágicas, que desafían la mecánica clásica de nuestra experiencia diaria. Si en un instante dado, el *spin* de un electrón se encuentra en un *estado cuántico* $\hat{\mathbf{a}} \in S^2$ debido a la acción de un campo magnético intenso, entonces la *probabilidad de observar el spin del electrón* en el estado $\hat{\mathbf{b}} \in S^2$ un instante después es

$$\text{prob}_{\hat{\mathbf{a}}}^+(\hat{\mathbf{b}}) := \frac{1}{2}(1 + \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}) = 1 - \frac{(\mathbf{m}_a - \mathbf{m}_b)^2}{\mathbf{m}_a^2 \mathbf{m}_b^2}, \quad (43)$$

donde

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{2}{\mathbf{m}_a} - \mathbf{e}_3 \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{b}} = \frac{2}{\mathbf{m}_b} - \mathbf{e}_3,$$

ver [13, 16].

Por otro lado, la *probabilidad de emisión de un fotón* por parte de un electrón, preparado en un estado de spin $\hat{\mathbf{b}}$ y forzado a cambiar al estado $\hat{\mathbf{a}}$ por la acción de un campo magnético, es

$$\text{prob}_{\hat{\mathbf{a}}}^-(\hat{\mathbf{b}}) := \frac{1}{2}(1 - \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}) = \frac{(\mathbf{m}_a - \mathbf{m}_b)^2}{\mathbf{m}_a^2 \mathbf{m}_b^2}. \quad (44)$$

Cualquiera que sea el instante de emisión del fotón, éste tiene *exactamente la misma energía*, independientemente del ángulo θ entre los estados de spin $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\mathbf{b}}$, [17, 18].

En la Figura 23 se muestra una gráfica de esas dos funciones de probabilidad.

Las igualdades (43) y (44) muestran que $prob_{\hat{\mathbf{a}}}^{\pm}(\hat{\mathbf{b}})$ está directamente relacionada con la distancia euclidiana entre los puntos $\mathbf{m}_a, \mathbf{m}_b \in Plano_{\mathbf{e}_3}(\mathbf{e}_{12})$.

El caso para el cual

$$\mathbf{m}_a = \mathbf{m} = \mathbf{x} + \mathbf{e}_3, \quad \hat{\mathbf{b}} = -\hat{\mathbf{a}}, \quad \text{y} \quad \mathbf{m}_b = \mathbf{m}_{\perp} = -\frac{1}{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_3$$

se muestra en la Figura 22.

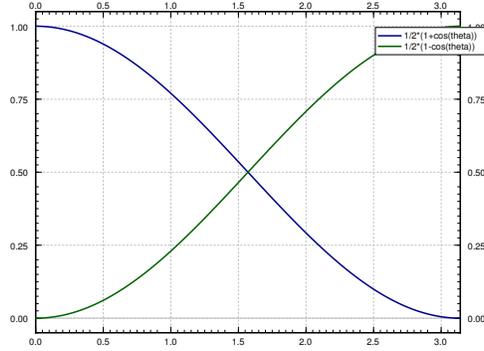


Figure 23: Las funciones $prob_{\hat{\mathbf{a}}}^{\pm}(\hat{\mathbf{b}})$. El ángulo $0 \leq \theta \leq \pi$ se encuentra entre los vectores unitarios $\hat{\mathbf{a}}$ y $\hat{\mathbf{b}}$.

References

- [1] W.K. Clifford, *Applications of Grassmann's extensive algebra*, Am. J. Math (ed.), Mathematical Papers by William Kingdon Clifford, pp. 397-401, Macmillan, London (1882) (Reimpreso por Chelsea, New York, 1968).
- [2] E.B. Corrochano, G. Sobczyk, Editors, *Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering*, Birkhäuser (2001).
- [3] M.J. Crowe, *A History of Vector Analysis*, Dover, New York (1985).
- [4] T. Dantzig, *Number: The Language of Science*, 4th edition. Free Press, New York 1967.
- [5] C. Doran, A. Lasenby, *Geometric Algebra for Physicists*, Cambridge 2007.
- [6] T. F. Havel, J.L. Doran, *Geometric Algebra in Quantum Information Processing*, Contemporary Mathematics, ISBN-10: 0-8218-2140-7, Vol. 305, 2002.

- [7] D. Hestenes and G. Sobczyk. *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*, 2nd edition, Kluwer 1992.
- [8] P. Lounesto, *Clifford Algebras and Spinors, 2nd Edition*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [9] G. Sobczyk, *Hyperbolic Number Plane*, The College Mathematics Journal, Vol. 26, No. 4, pp.268-280, September 1995.
- [10] G. Sobczyk, *Conformal Mappings in Geometric Algebra*, Notices of the AMS, Volume 59, Number 2, p.264-273, 2012.
- [11] G. Sobczyk, *New Foundations in Mathematics: The Geometric Concept of Number*, Birkhäuser, New York 2013.
- [12] G. Sobczyk, *Geometric Spinors, Relativity and the Hopf Fibration*, <http://www.garretstar.com/geo2hopf26-9-2015.pdf>
- [13] G. Sobczyk, *Part I: The Vector Analysis of Spinors* (2016) <http://www.garretstar.com/paulispin-19-07-2015.pdf>
<https://arxiv.org/pdf/1507.06608.pdf>
- [14] G. Sobczyk, *Geometrization of the Real Number System*, July 2017. <http://www.garretstar.com/geonum2017.pdf>
- [15] G. Sobczyk, *Hyperbolic Numbers Revisited*, Dec. 2017. <http://www.garretstar.com/hyprevisited12-17-2017.pdf>
- [16] G. Sobczyk, *Spinors in Spacetime Algebra and Euclidean 4-Space* (2017) <https://arxiv.org/pdf/1703.01244.pdf>
- [17] L. Susskind, *Lecture Notes 2: Electron Spin*, Stanford University (2006). <http://www.lecture-notes.co.uk/susskind/quantum-entanglements/lecture-2/electron-spin/>
- [18] L. Susskind, *YouTube: Quantum Entanglements, Lecture 2* <https://www.youtube.com/playlist?list=PL8D12D5AADF422C5D&feature=plcp>